JOURNAL OF NUMBER THEORY 20, 282–298 (1985)

Über verschränkte Produktordnungen

H. BENZ

Mathematisches Institut der Universität Köln, Cologne, West Germany

UND

H. ZASSENHAUS

Department of Mathematics, The Ohio State University, Columbus, Ohio 43210

Communicated by the Editors

Received April 6, 1983

EMMY NOETHER ANLÄSSLICH IHRES HUNDERTJÄHRIGEN GEBURTSTAGES GEWIDMET

This paper, which is dedicated to Emmy Noether on the occasion of the centenary of her birthday, is concerned with the arithmetics of crossed products. In particular, the definition of a crossed product order is tightened and it is shown that such orders are "one-headed," i.e., that the "idealizer of radical" method of embedding always leads to the same hereditary order.

Einführend machen wir zunächst die Annahme, daß R ein kompletter lokaler Dedekindbereich mit Quotientenkörper K, A ein zentral einfaches hyperkomplexes System über K, Z eine einfache Teilalgebra von A über K mit 1_A als Einselement und $\mathfrak{o}_Z$ eine hereditäre R-Ordnung von Z ist.

Die Aufgabe besteht darin, $\mathfrak{o}_Z$ in eine hereditäre R-Ordnung $\mathfrak{o}_A$ von A so einzubetten, daß das Radikalideal $j(\mathfrak{o}_Z)$ von $\mathfrak{o}_z$ mit $\mathfrak{o}_A$ vertauschbar ist. In der Arbeit [1] wurde gezeigt, daß genau ein $\mathfrak{o}_A$ in dem Fall existiert, daß Z ein separabler maximal kommutativer Teilkörper von A ist. In der Arbeit [5] wurde die eindeutige Existenz von $\mathfrak{o}_A$ auch für den Fall behauptet, daß das Zentrum $\mathfrak{z}(Z)$ ein separabler Oberkörper von K ist, der mit dem Zentralisator von Z in A übereinstimmt. Aber der Beweis enthält eine Lücke (sh. die letzten drei Zeilen S. 389).

Schon in den zitierten Arbeiten spielten verschränkte Produktordnungen eine wichtige Rolle. Ihre Benutzung macht es z.B. möglich, den Grundkörper unverzweigt zu erweitern und damit die Algebra zum Zerfallen zu bringen,

0022-314X/85 $3.00

so daß A nach Erweiterung des Grundkörpers in eine volle Matrixalgebra über dem Erweiterungskörper übergeht. Es hat sich bei erneuter Diskussion des Problems gezeight, daß es zweckmäßig ist, die in [5] gegebenen Definition der verschränkten Produktordnung einzuschränken.

Zunächst wiederholen wir die Definition der Galoisalgebra, wie sie unter anderem Namen in [5] gegeben wurde.

DEFINITION 1. Das zentral einfache hyperkomplexe System A über dem Grundkörper K heißt *Galoisalgebra* bezüglich der halbeinfachen K-Unteralgebra Z von A und der Untergruppe G der Einheitengruppe $U(A)$ von A, wenn

1. $1_A \in Z$,
2. G ist enthalten in dem Normalisator

$$\mathrm{Nor}_{U(A)}(Z) = \{x/xU(A)\ \&\ x^{-1}Zx = Z\}$$

von Z in der Einheitengruppe von A,

3. G enthält die Einheitengruppe $U(Z)$ als Untergruppe von endlichem Index,[1]

4. A ist die direkte Summe der K-Untermoduln Zu_σ, wobei u_σ über ein Vertretersystem der Restklassen σ von G über $U(Z)$ läuft:

$$A = \sum_{\sigma = u_\sigma/U(Z) \in G/U(Z)}^{\cdot} Zu_\sigma,$$

5. Der Zentralisator von G in A ist K.

Diese Definition geht über in den Begriff der zyklischen Algebra im Sinne von Dickson, Wedderburn [2], wenn Z zyklischer Oberkörper von K ist, in den Begriff der verschränkten Produktalgebra im Sinne von Noether, sh. Hasse [3], wenn Z eine normale Erweiterung von K ist, in den Begriff der Teichmüllerschen Algebra [4], wenn Z ein kommutatives halbeinfaches System ist. Es mag bemerkt werden, daß G in den beiden ersten Fällen gleich dem Normalisator von Z in $U(A)$ ist. Ferner ist Z separabel über K in jedem Falle. Die Definition ist invariant gegenüber Erweiterung des Grundkörpers von K zu E, es wird dann $E \otimes_K A$ Galoisalgebra bezüglich $E \otimes_K Z$ und $G \cdot U(E \otimes_K Z)$.

Die Struktur von Galoisalgebren läßt sich wie folgt näher beschreiben. Ist

$$1_A = 1_Z = \sum_{i=1}^{n_1} E_i$$

[1] Es ist klar, daß $U(Z)$ Normalteiler von G ist.

eine Zerlegung der Eins in primitive zentrale Idempotente von Z, so werden die Idempotente E_i unter der Transformationsaktion der Elemente von G auf Z transitiv permutiert. Die einfachen McLagan–Wedderburn Komponenten $E_i Z$ sind paarweise K-isomorph, ihre Zentren $\mathfrak{z}(E_i Z)$ sind normale separable Erweiterungen eines Grades n_2 über $E_i K$. Der Stabilisator

$$G_{E_1} = \{ g/g \in G \,\&\, g^{-1} E_1 g = E_1 \}$$

von E_1 unter G ist eine Untergruppe vom Index n_1 in G. Die Transformationsaktion der Elemente aus G_{E_1} auf $E_1 Z$ liefert bei Restriktion auf das Zentrum die volle Automorphismengruppe von $\mathfrak{z}(E_1 Z)$ über $E_1 K$, wobei genau die Elemente aus $U(Z)$ trivial auf $\mathfrak{z}(E_1 Z)$ operieren. Es ist daher

$$\begin{aligned} G_{E_1}/U(Z) &\cong \operatorname{Aut}(\mathfrak{z}(E_1 Z)/E_1 K), \\ \dim_K A &= n^2 && (n \in \mathbb{Z}^{>0}), \\ \dim_{\mathfrak{z}(E_1 Z)} E_1 Z &= n_3^2 && (n_3 \in \mathbb{Z}^{>0}), \\ [\mathfrak{z}(E_1 Z): E_1 K] &= n_2 && (n_2 \in \mathbb{Z}^{>0}), \\ n &= n_1 n_2 n_3. \end{aligned}$$

Besitzt umgekehrt ein zentral einfaches hyperkomplexes System A vom Grad n über dem Grundkörper K eine halbeinfache K-Unteralgebra Z, in der für 1_A eine Zerlegung in primitive zentrale Idempotente $E_1, \ldots, E_{n_1}$ mit K-isomorphen Komponenten $E_i Z$ von Z existiert, so werden diese Idempotenten unter der Transformationsaktion des Normalisators

$$\operatorname{Nor}_{U(A)} Z = \{x/x \in U(A) \,\&\, x^{-1} Z x = Z\}$$

von Z in $U(A)$ transitiv permutiert. Seien ferner die Zentren $\mathfrak{z}(E_i Z)$ normale separable Erweiterungen von $E_i K$ und G irgendeine Untergruppe von $\operatorname{Nor}_{U(A)} Z$, die die Einheitengruppe $U(Z)$ von Z als Untergruppe vom Index $n_1 n_3$ enthält und so, daß der Stabilisator G_{E_1} von E_1 in G bei Restriktion auf $\mathfrak{z}(E_1 Z)$ die volle Automorphismengruppe von $\mathfrak{z}(E_1 Z)$ über $E_1 K$ ergibt. Dann ist A Galoisalgebra bezüglich Z und G mit den obigen Eigenschaften.

Aufbauend auf Definition 1 geben wir nun

Definition 2. Sei A eine Galoisalgebra über dem Grundkörper K bezüglich der halbeinfachen K-Unteralgebra Z von A und der Untergruppe G der Einheitengruppe von A. Ferner sei K Quotientenkörper des Dedekindbereiches R.

Die R-Ordnung $\mathfrak{o}$ von A heißt *verschränkte Produktordnung* bezüglich Z, G und R, wenn

1. $\mathfrak{o} \cap Z = \mathfrak{o}_Z$ eine hereditäre R-Ordnung von Z ist,

2. $\mathfrak{o}=\sum^{\cdot}_{\sigma\in\bar{G}/U(Z)} M(\mathfrak{o},\sigma)$, $M(\mathfrak{o},\sigma)=\mathfrak{o}_Z(\mathfrak{o}\cap\sigma)$,

3. $M(\mathfrak{o},\sigma)^{-1}M(\mathfrak{o},\sigma)=\mathfrak{o}_z=M(\mathfrak{o},\sigma)M(\mathfrak{o},\sigma)^{-1}$, wobei $M(\mathfrak{o},\sigma)^{-1}=\{x/x\in A\ \&\ xM(\mathfrak{o},\sigma)\subseteq\mathfrak{o}_z\}$ $(\sigma\in\bar{G})$,

4. $M(\mathfrak{o},\sigma)^{-1}\,\mathfrak{o}M(\mathfrak{o},\sigma)=\mathfrak{o}$.

Es folgt aus 1, 2 und 4, daß

4a. $M(\mathfrak{o},\sigma)^{-1}\,\mathfrak{o}_Z M(\mathfrak{o},\sigma)=\mathfrak{o}_Z$.

In [5] wurde nur die schwächere Bedingung 4a gefordert. Alle verschränkten Produltordnungen in dieser Arbeit sollen der stärkeren Bedingung 4 genügen.

In dem Falle, daß der Dedekindbereich R unendlich viele Primideale enthält, ist das Jacobsonsche Radikal jeder R-Ordnung Λ, d.h. der Durchschnitt der maximalen Ideale von Λ, stets 0. Es empfiehlt sich daher, ein arithmetisches Radikal einzuführen, das nur das Verhalten der Diskriminantenteiler berücksichtigt.

Sei A ein separabel halbeinfaches hyperkomplexes System der Dimension $n=\dim_K A$ über dem Quotientenkörper K des Dedekindbereiches R und $SP=Sp_{A/K}$ die reduzierte Spur von A über K. Dann wird das Diskriminantenideal $\mathfrak{d}(M/R)$ jedes endlich erzeugten R-Untermoduls M vom Range n in A wie bekannt als der von den Determinanten $Sp(a_i b_k)$ $(a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n\in M)$ erzeugte R-Untermodul von K erklärt. Es ist ein ein gebrochenes R-Ideal $\neq 0$. Jede R-Maximalordnung von A hat dasselbe in R enthaltene Diskriminantenideal, etwa $\mathfrak{d}(A/R)$. Wenn M in einer R-Ordnung enthalten ist, dann ist $\mathfrak{d}(M/R)$ in $\mathfrak{d}(A/R)$ enthalten.

Definition 3. Das *arithmetische Radikal* $\mathrm{AR}(\Lambda)$ einer R-Ordnung Λ von A wird erklärt als der Durchschnitt aller maximalen Ideale von Λ, die $\mathfrak{d}(\Lambda/R)$ enthalten.

Das arithmetische Radikal einer R-Ordnung Λ ist stets ein in Λ enthaltener R-Modul vom Rang $n=\dim_K A$.

Nun können wir das Hauptergebnis dieser Arbeit formulieren als

Satz. (a) *Für jede verschränkte Produktordnung* $\mathfrak{o}$ *im Sinne der Definitionen* 1, 2 *gibt es genau eine hereditäre R-Ordnung* $\mathfrak{o}_A$ *von A mit den Eigenschaften*

$$\mathrm{AR}(\mathfrak{o}_Z)\,\mathfrak{o}_A=\mathfrak{o}_A\,\mathrm{AR}(\mathfrak{o}_Z), \tag{1}$$

$$M(\mathfrak{o},\sigma)\,\mathfrak{o}_A=\mathfrak{o}_A M(\mathfrak{o},\sigma) \qquad (\sigma\in\bar{G}). \tag{2}$$

(b) *Unter allen verschränkten Produktordnungen bezüglich Z, G, R, die in* $\mathfrak{o}_A$ *enthalten sind, gibt es genau eine größte, etwa* $\mathfrak{o}_{A,V}$.

(c) $\mathfrak{o}_A$ *ist der Durchschnitt aller* $\mathfrak{o}_{A,V}$ *enthaltenden R-Maximalordnungen von A.*

Als Einleitung in den Beweis des Satzes möge zunächst benutzt werden, daß es für jede verschränkte Produktordnung $\mathfrak{o}$ im Sinne von Definition 1.2 jedenfalls stets eine hereditäre R-Ordnung $\mathfrak{o}_A$ von A mit den Eigenschaften (1), (2) gibt. In der Tat wissen wir gemäß [5], daß der Idealisator

$$\mathrm{Id}_A(\mathrm{AR}(\mathfrak{o})) = \{x/x \in A \;\&\; x\mathrm{AR}(\mathfrak{o}) + \mathrm{AR}(\mathfrak{o})x \subseteq \mathrm{AR}(\mathfrak{o})\} = \mathfrak{o}^{(1)}$$

des arithmetischen Radikals von $\mathfrak{o}$ in A eine R-Ordnung $\mathfrak{o}^{(1)}$ von A ist, die das arithmetische Radikal von $\mathfrak{o}$ als in $\mathrm{AR}(\mathfrak{o}^{(1)})$ enthaltenes Ideal enthält. Und zwar ist $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}^{(1)}$ genau dann, wenn $\mathfrak{o}$ hereditär ist (sh. z.B. [5]). Es gibt daher stets eine Kette

$$\mathfrak{o} = \mathfrak{o}^{(0)} \subset \mathfrak{o}^{(1)} \subset \cdots \subset \mathfrak{o}^{(\lambda)}$$

der Länge $\lambda \in \mathbb{Z}^{\geqslant 0}$, sodaß $\mathfrak{o}^{(\lambda)}$ eine hereditäre R-Ordnung von A ist und ferner $(\mathfrak{o}^{(i)})^{(1)} = \mathfrak{o}^{(i+1)}$, wenn $i = 0, 1, \ldots, \lambda - 1$. Wir zeigen, daß die hereditäre Ordnung $\mathfrak{o}_A = \mathfrak{o}^{(\lambda)}$ der Bedingung (1) genügt.

Zunächst folgt aus dem hereditären Charakter der R-Ordnung $\mathfrak{o}_Z$ von Z gemäß [5], daß das arithmetische Radikal von $\mathfrak{o}_Z$ ein Inverses $\mathrm{AR}(\mathfrak{o}_Z)^{-1}$ bezüglich $\mathfrak{o}_Z$ besitzt, sodaß $\mathrm{AR}(\mathfrak{o}_Z)^{-1}$ ein endlicher R-Modul von Z ist, für den

$$\mathrm{AR}(\mathfrak{o}_Z)^{-1}\,\mathrm{AR}(\mathfrak{o}_Z) = \mathfrak{o}_Z = \mathrm{AR}(\mathfrak{o}_Z)\,\mathrm{AR}(\mathfrak{o}_Z)^{-1}.$$

Für x in $\mathfrak{o}^{(1)}$ haben wir

$$\begin{aligned}\mathrm{AR}(\mathfrak{o}_Z)^{-1} \times \mathrm{AR}(\mathfrak{o}_Z)\,\mathrm{AR}(\mathfrak{o}) &+ \mathrm{AR}(\mathfrak{o})\,\mathrm{AR}(\mathfrak{o}_Z)^{-1} \times \mathrm{AR}(\mathfrak{o}_Z)\\ &\subseteq \mathrm{AR}(\mathfrak{o}_Z)^{-1}\,\mathrm{AR}(\mathfrak{o}_Z)\,\mathrm{AR}(\mathfrak{o})\\ &\quad + \mathrm{AR}(\mathfrak{o})\,\mathrm{AR}(\mathfrak{o}_Z)^{-1}\,\mathrm{AR}(\mathfrak{o}_Z) = \mathrm{AR}(\mathfrak{o}),\end{aligned}$$

mithin

$$\mathrm{AR}(\mathfrak{o}_Z)^{-1}\,\mathfrak{o}^{(1)}\mathrm{AR}(\mathfrak{o}_z) \subseteq \mathfrak{o}^{(1)}.$$

Auf ähnliche Weise erhalten wir

$$\begin{aligned}&\mathrm{AR}(\mathfrak{o}_Z)\,\mathfrak{o}^{(1)}\mathrm{AR}(\mathfrak{o}_Z)^{-1} \subseteq \mathfrak{o}^{(1)},\\ &\qquad \mathfrak{o}^{(1)} = \mathrm{AR}(\mathfrak{o}_Z)^{-1}\,\mathrm{AR}(\mathfrak{o}_Z)\,\mathfrak{o}^{(1)}\,\mathrm{AR}(\mathfrak{o}_Z)^{-1}\,\mathrm{AR}(\mathfrak{o}_Z)\\ &\qquad\quad \subseteq \mathrm{AR}(\mathfrak{o}_Z)^{-1}\,\mathfrak{o}^{(1)}\,\mathrm{AR}(\mathfrak{o}_Z),\end{aligned}$$

also

$$\mathrm{AR}(\mathfrak{o}_Z)^{-1}\,\mathfrak{o}^{(1)}\mathrm{AR}(\mathfrak{o}_Z) = \mathfrak{o}^{(1)}.$$

Die Abbildung der zweiseitigen Ideale $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{o}^{(1)}$ auf $\mathrm{AR}(\mathfrak{o}_Z)^{-1}\,\mathfrak{a}\,\mathrm{AR}(\mathfrak{o}_Z)$ ist eineindeutig und erhält Idealaddition und Idealmultiplikation. Für jedes Ideal $\mathfrak{a}_0$ von R geht das Ideal $\mathfrak{a}_0\mathfrak{o}^{(1)}$ von $\mathfrak{o}^{(1)}$ in sich selbst über. Wir schließen aus diesen beiden Bemerkungen, daß

$$\mathrm{AR}(\mathfrak{o}_z)^{-1}\,\mathrm{AR}(\mathfrak{o}^{(1)})\,\mathrm{AR}(\mathfrak{o}_Z)=\mathrm{AR}(\mathfrak{o}^{(1)}).$$

Mithin, wie oben

$$\mathrm{AR}(\mathfrak{o}_Z)^{-1}\,\mathfrak{o}^{(2)}\,\mathrm{AR}(\mathfrak{o}_Z)=\mathfrak{o}^{(2)}$$

usw., schließlich

$$\mathrm{AR}(ß_Z)^{-1}\,\mathfrak{o}^{(\lambda)}\mathrm{AR}(\mathfrak{o}_Z)=\mathfrak{o}^{(\lambda)}$$

und somit (1). Auf ähnliche Weise zeigen wir auch (2).

Nachdem die Existenz der hereditären R-Ordnung $\mathfrak{o}_A$ von A im Einklang mit (1), (2) sichergestellt ist, wenden wir uns nun dem Beweis der übrigen Eigenschaften von $\mathfrak{o}_A$ zu. Wir machen zunächst die zusätzlichen Voraussetzungen

(A) R ist ein kompletter lokaler Dedekindbereich mit maximalem Ideal $\mathfrak{g}$,

(B) die Algebra A ist Matrizenring n-ten Grades über K,

(C) die Algebra Z ist die direkte Summe von zueinander K-isomorphen einfachen Algebren $Z_1,\dots,Z_{n_1}$ und Z_1 ist ein Matrizenring n_2-ten Grades über dem Zentrum $\mathfrak{z}(Z_1)$ von Z_1,

(D) das Zentrum $\mathfrak{z}(Z_1)$ ist eine normale separable und voll verzweigte Erweiterung vom Grade n_3 über $1_{Z_1}K$,

(E) $n=n_1n_2n_3$, $|\bar{G}|=(G\colon U(Z))=n_1n_3$.

Da der Dedekindbereich R lokal ist, so stimmt das arithmetische Radikal mit dem gewöhnlichen (Jacobsonschen) Radikal $j(\Lambda)$ jeder R-Ordnung Λ überein. Nach Voraussetzung ist

$$j(\mathfrak{o}_Z)^{e(\mathfrak{o}_Z/R)}=\mathfrak{p}\mathfrak{o}_Z,\qquad e(\mathfrak{o}_Z/R)\in\mathbb{Z}^{>0}. \tag{3}$$

Ferner ist nach Konstruktion

$$j(\mathfrak{o}_Z)\,\mathfrak{o}_A=\mathfrak{o}_A\,j(\mathfrak{o}_Z), \tag{4}$$

sodaß $j(\mathfrak{o}_Z)\,\mathfrak{o}_A$ ein zweiseitiges Ideal von $\mathfrak{o}_A$ mit $(j(\mathfrak{o}_Z)\,\mathfrak{o}_A)^{-1}=j(\mathfrak{o}_Z)^{-1}\,\mathfrak{o}_A$ als inversem Ideal ist, für das

$$(j(\mathfrak{o}_Z)\,\mathfrak{o}_A)^{e(\mathfrak{o}_Z/R)}=\mathfrak{p}\mathfrak{o}_A, \tag{5}$$

$$(j(\mathfrak{o}_Z)\,\mathfrak{o}_A)^{-1}j(\mathfrak{o}_Z)\,\mathfrak{o}_A=\mathfrak{o}_A=j(\mathfrak{o}_Z)\,\mathfrak{o}_A(j(\mathfrak{o}_Z)\,\mathfrak{o}_A)^{-1}. \tag{6}$$

Da nun $\mathfrak{o}_A$ eine hereditäre R-Ordnung der einfachen Algebra A ist, so bilden die bezüglich $\mathfrak{o}_A$ invertierbaren zweiseitigen gebrochenen $\mathfrak{o}_A$-Ideale eine unendliche zyklische Gruppe, die von $j(\mathfrak{o}_A)$ erzeugt wird, mithin

$$j(\mathfrak{o}_Z)\,\mathfrak{o}_A = j(\mathfrak{o}_A)^{e(A/\mathfrak{o})}, \qquad e(A/\mathfrak{o}) \in \mathbb{Z}^{>0}. \tag{7}$$

Die Relationen (2) haben zur Folge, daß für σ aus $\bar{G}$ stets $M(\mathfrak{o}, \sigma)\,\mathfrak{o}_A = \mathfrak{o}_A M(\mathfrak{o}, \sigma)$ ein zweiseitiges Ideal von $\mathfrak{o}_A$ mit $(M(\mathfrak{o}, \sigma)\,\mathfrak{o}_A)^{-1} = M(\mathfrak{o}, \sigma)^{-1}\,\mathfrak{o}_A = \mathfrak{o}_A M(\mathfrak{o}, \sigma)^{-1}$ als Inversem bezüglich $\mathfrak{o}_A$ ist. Daher gelten Gleichungen

$$\mathfrak{o}_A M(\mathfrak{o}, \sigma) = j(\mathfrak{o}_A)^{\nu_\sigma}, \qquad \nu_\sigma \in \mathbb{Z}^{\geqslant 0}\ (\sigma \in \bar{G}).$$

Wir betten nun $\mathfrak{o}$ in die verschränkte Produktordnung

$$\mathfrak{o}' = \sum_{\sigma \in \bar{G}}^{\cdot} M(\mathfrak{o}', \sigma) \tag{8a}$$

mit

$$\begin{aligned} M(\mathfrak{o}', \sigma) &= j(\mathfrak{o}_Z)^{-[\nu_\sigma/e(A/\mathfrak{o})]}\, M(\mathfrak{o}, \sigma) \\ &= M(\mathfrak{o}, \sigma)\, j(\mathfrak{o}_Z)^{-[\nu_\sigma/e(A/\mathfrak{o})]} \end{aligned} \tag{8b}$$

ein, sodaß

$$M(\mathfrak{o}', \sigma)\,\mathfrak{o}_A = \mathfrak{o}_A M(\mathfrak{o}', \sigma) = j(\mathfrak{o}_A)^{\nu'_\sigma}, \qquad \nu'_\sigma \in \mathbb{Z}^{\geqslant 0},$$

mit

$$\sigma \leqslant \nu'_\sigma = \nu_\sigma - [\nu_\sigma/e(A/\mathfrak{o})] \in (A/\mathfrak{o}) < e(A/\mathfrak{o})$$

gilt für σ in $\bar{G}$.

Auch $M(\mathfrak{o}, \sigma)$ ist bezüglich $\mathfrak{o}_A$ invertierbar:

$$M(\mathfrak{o}', \sigma)^{-1} = j(\mathfrak{o}_Z)^{[\nu_\sigma/e(A/\mathfrak{o})]}\, M(\mathfrak{o}, \sigma)^{-1},$$

$$M(\mathfrak{o}', \sigma)^{-1}\, M(\mathfrak{o}', \sigma) = \mathfrak{o}_A = M(\mathfrak{o}', \sigma)\, M(\mathfrak{o}', \sigma)^{-1}.$$

Ferner gilt auch

$$M(\mathfrak{o}', \sigma)^{-1}\,\mathfrak{o}_Z M(\mathfrak{o}', \sigma) = \mathfrak{o}_Z,$$

$$M(\mathfrak{o}', \sigma)^{-1}\,\mathfrak{o}' M(\mathfrak{o}', \sigma) = \mathfrak{o}',$$

$$M(\mathfrak{o}', \sigma)^{-1}\,\mathfrak{o}_A M(\mathfrak{o}', \sigma) = \mathfrak{o}_A,$$

sodaß $\mathfrak{o}_A$ auch bezüglich der verschränkten Produktordnung $\mathfrak{o}'$ den Bedingungen (1), (2) genügt. Es ist dann klar, daß eine nochmalige Wiederholung der Konstruktion wiederum zu $\mathfrak{o}'$ führt:

$$(\mathfrak{o}')' = \mathfrak{o}'.$$

Schließlich bemerken wir, daß $\mathfrak{o}'$ durch $\mathfrak{o}$ unabhängig von der Wahl von $\mathfrak{o}_A$ im Einklang mit (1), (2), (8a, b) bestimmt ist. Zunächst beachten wir nämlich, daß $\mathfrak{o}_A \cap Z$ eine R-Oberordnung von $\mathfrak{o}_Z$ ist, für die $j(\mathfrak{o}_Z)^{-1}$ $(\mathfrak{o}_A \cap Z) j(\mathfrak{o}_Z) = \mathfrak{o}_A \cap Z$ ist. Da $\mathfrak{o}_Z$ hereditär ist, so folgt

$$\mathfrak{o}_A \cap Z = \mathfrak{o}_Z \tag{9}$$

wie bekannt. Weiter beachten wir, daß

$$(\mathfrak{o} \cap \sigma)^{(G:U(Z))} \subseteq \mathfrak{o} \cap U(Z). \tag{10}$$

Der Index $\mu_\sigma = [\nu_\sigma / e(A/\mathfrak{o})]$ ist durch die Relationen

$$j(\mathfrak{o}_Z)^{-\mu_\sigma} M(\mathfrak{o}, \sigma) \subseteq \mathfrak{o}_A,$$
$$j(\mathfrak{o}_Z)^{-\mu_\sigma - 1} M(\mathfrak{o}, \sigma) \not\subseteq \mathfrak{o}_A,$$

die gleichbedeutend sind mit

$$j(\mathfrak{o}_Z)^{-\mu_\sigma (G:U(Z))} M(\sigma, \sigma)^{(G:U(Z))} \subseteq \mathfrak{o}_A,$$
$$j(\mathfrak{o}_Z)^{-(\mu_\sigma + 1)(G:U(Z))} M(\mathfrak{o}, \sigma)^{(G:U(Z))} \not\subseteq \mathfrak{o}_A,$$

oder

$$j(\mathfrak{o}_Z)^{-\mu_\sigma (G:U(Z))} (\mathfrak{o} \cap \sigma)^{(G:U(Z))} \subseteq \mathfrak{o}_A,$$
$$j(\mathfrak{o}_Z)^{-(\mu_\sigma + 1)(G:U(Z))} (\sigma \cap \sigma)^{(G:U(Z))} \not\subseteq \mathfrak{o}_A,$$

oder also wegen (9), (10) mit

$$j(\mathfrak{o}_Z)^{-\mu_\sigma (G:U(Z))} (\sigma \cap \sigma)^{(G:U(Z))} \subseteq \mathfrak{o}_Z,$$
$$j(\mathfrak{o}_z)^{-(\mu_\sigma + 1)(G:U(Z))} (\sigma \cap \sigma)^{(G:U(Z))} \not\subseteq \mathfrak{o}_Z,$$

gegeben. Somit hängt μ_σ alleine von $\mathfrak{o}$ *ab.*

Wir können also ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\mathfrak{o}$ durch $\mathfrak{o}'$ ersetzen. Mithin müssen wir unter der zusätzlichen Annahme

$$\mathfrak{o}' = \mathfrak{o} \tag{11}$$

zeigen, daß $\mathfrak{o}_A$ eindeutig bestimmt ist, daß $\mathfrak{o}_A$ der Durchschnitt aller $\mathfrak{o}$ enthaltenden Maximalordnungen ist und daß $\mathfrak{o}$ die größte in $\mathfrak{o}_A$ enthaltene verschränkte Produktordnung von A bezüglich Z, G, R ist.

Nach Annahme (11) ist

$$M(\mathfrak{o}, \sigma)\, \mathfrak{o}_A = \mathfrak{o}_A M(\mathfrak{o}, \sigma) = j(\mathfrak{o}_A)^{\nu_\sigma}, \qquad 0 \leqslant \nu_\sigma < e(A/\mathfrak{o}). \tag{12}$$

Ferner gilt allgemein

$$M(\mathfrak{o}, \sigma)\, M(\mathfrak{o}, \tau) \subseteq M(\mathfrak{o}, \sigma\tau) \qquad (\sigma, \tau \in \bar{G}), \tag{13}$$

sodaß in unserem Falle

$$\begin{aligned} M(\mathfrak{o},\sigma)\,M(\mathfrak{o},\tau) &= M(\mathfrak{o},\sigma\tau) && \text{wenn } \nu_\sigma+\nu_\tau < e(A/\mathfrak{o}), \\ &= j(\mathfrak{o}_Z)^{-1}\,M(\mathfrak{o},\sigma\tau) && \text{wenn } \nu_\sigma+\nu_\tau \geqslant e(A/\mathfrak{o}). \end{aligned} \tag{14}$$

Insbesondere bilden die σ aus $\bar{G}$, für die der Exponent ν_σ gleich Null ist, den Normalteiler $\bar{N} = \{\sigma/\sigma \in \bar{G} \,\&\, \nu_\sigma = 0\}$. Für σ aus $\bar{N}$ haben wir $\mathfrak{o}_A M(\mathfrak{o},\sigma) = \mathfrak{o}_A = M(\mathfrak{o},\sigma)\,\mathfrak{o}_A$. Es muß also in $\mathfrak{o} \cap \sigma$ eine Einheit u_σ von $\mathfrak{o}_A$ geben; diese ist natürlich auch Einheit in $\mathfrak{o}$. Also

$$M(\mathfrak{o},\sigma) = \mathfrak{o}_Z u_\sigma = u_\sigma \mathfrak{o}_Z, \qquad u_\sigma \in U(\mathfrak{o}) \qquad (\sigma \in \bar{N}), \tag{15}$$

$$u_\sigma u_\tau = c_{\sigma,\tau} u_{\sigma\tau}, \qquad c_{\sigma,\tau} \in U(\mathfrak{o}_Z) \qquad (\sigma,\tau \in \bar{N}). \tag{16}$$

Die Regel (14) impliziert, daß die Abbildung von $\bar{G}$ nach $\mathbb{Z}/e(A/\mathfrak{o})$, die σ auf $\nu_\sigma/e(A(\mathfrak{o})$ abbildet, ein Multiplikation-Addition-Homomorphismus mit $\bar{N}$ als Kern ist. Die Faktorgruppe von $\bar{G}$ über $\bar{N}$ ist daher zyklisch von einer Ordnung e_1 mit einer Erzeugenden $\sigma_1/\bar{N}$, für die gilt

$$\sigma_1 \in \bar{G}, \qquad \nu_{\sigma_1} = e_2, \qquad e(A/\mathfrak{o}) = e_1 e_2, \qquad e_1, e_2 \in \mathbb{Z}^{>0}. \tag{17}$$

Um die Struktur von $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{o}_A$ zu beschreiben, knüpfen wir an die Strukturanalyse der Galoisalgebra A bezüglich Z, G an. Die zentralen primitiven Idempotenten von

$$Z = Z_1 \oplus Z_2 \oplus \cdots \oplus Z_{n_1}$$

sind

$$e_i = 1_{Z_i} \qquad (1 \leqslant i \leqslant n_1).$$

Die Transformationsaktion mit den Elementen von G auf Z permutiert $Z_1,\dots,Z_{n_1}$ sowohl als $e_1,\dots,e_{n_1}$ transitiv. Restriktion auf den Normalteiler $N = \{g/g \in G \,\&\, g/U(Z) \in \bar{N}\}$ führt zu t_2 Bahnen gleicher Länge t_1 mit

$$n_1 = t_1 t_2, \qquad t_1, t_2 \in \mathbb{Z}^{>0}, \tag{18}$$

sodaß nach passender Numerierung die Idempotenten

$$e_{(i-1)t_1+1},\dots,e_{it_1} \qquad (1 \leqslant \leqslant t_2),$$

transitiv von N transformiert werden, somit sind die Idempotente

$$E_i = \sum_{j=1}^{t_1} e_{(i-1)t_1+j} \qquad (1 \leqslant i \leqslant t_2), \tag{19}$$

invariant unter der Transformationsaktion von N. Ferner kann nach geeigneter Numerierung angenommen werden, daß

$$\begin{aligned} M(\mathfrak{o},\sigma_1)^{-1} E_i \mathfrak{o}_Z M(\mathfrak{o},\sigma_1) &= E_{i+1}\mathfrak{o}_Z \qquad (1 \leqslant i \leqslant t_2), \\ M(\mathfrak{o},\sigma_1)^{-1} E_{t_2} \mathfrak{o}_Z M(\mathfrak{o},\sigma_1) &= E_1 \mathfrak{o}_Z \end{aligned} \tag{20}$$

wobei

$$e_1 = e_1' t_2, \qquad e_1' \in \mathbb{Z}^{>0}. \tag{21}$$

Für jedes i konstruieren wir t_1^2 Matrixeinheiten E_{ijk} (j, $k = 1, 2, \ldots, t_1$) von $E_i \mathfrak{o} E_i$ auf Grund der Bermerkung, daß es für jeden Index $j > 1$ ein Element σ_{ik} in $\bar{N}$ gibt, für das

$$u_{\sigma_{ik}}^{-1} e_{(i-1)t_1+1} u_{\sigma_{ik}} = e_{(i-1)t_1+k}$$

ist. Zunächst setzen wir

$$\begin{aligned}
&E_{i11} = e_{(i-1)t_1+1}, \\
&E_{i1k} = e_{(i-1)t_1+1} u_{\sigma_{ik}} e_{(i-1)t_1+k}, \\
&E_{ik1} = e_{(i-1)t_1+k} u_{\sigma_{ik}}^{-1} e_{(i-1)t_1+1}, \\
&E_{ikk} = e_{(i-1)t_1+k} \qquad\qquad (1 < k \leqslant t_1),
\end{aligned}$$

sodaß

$$E_i E_{ikk} = E_{ikk} E_i = E_{ikk}^2 = E_{ikk} \neq 0 \qquad (1 \leqslant k \leqslant t_1), \tag{22a}$$

$$\sum_{i=1}^{t_1} E_{ikk} = E_i, \tag{22b}$$

$$\begin{aligned}
&E_{i11} E_{i1k} = E_{i1k} E_{ikk} = E_{i1k}, \\
&E_{ikk} E_{ik1} = E_{ik1} E_{i11} = E_{ik1}
\end{aligned}$$

ist. Wenn $1 < k \leqslant t_1$, dann haben wir

$$\begin{aligned}
E_{i1k} E_{ik1} &= E_{i11} u_{\sigma_{ik}} E_{ikk} E_{ikk} u_{\sigma_{ik}}^{-1} E_{i11} \\
&= E_{i11} E_{i11} u_{\sigma_{ik}} u_{\sigma_{ik}}^{-1} E_{i11} E_{i11} = E_{i11}
\end{aligned}$$

und ähnlich

$$E_{ik1} E_{i1k} = E_{ikk}.$$

Setzen wir nun noch

$$E_{ijk} = E_{ij1} E_{i1k} \qquad (1 < j \leqslant t_1,\ 1 < k \leqslant t_1),$$

dann genügen die t_1^2 Elemente E_{ijk} von $E_i \mathfrak{o} E_i$ den Relationen (22a, b) und

$$E_{ijk} E_{ij'k'} = {}_{kj'} E_{ijk'} \qquad (j, k, j', k' = 1, 2, \ldots, t_1), \tag{23}$$

für Matrixeinheiten.

Sei nun Λ irgendeine $\mathfrak{o}$ enthaltende R-Maximalordnung von A. Da A Matrizenring vom Grade n über K ist und der Dedekindbereich R lokal ist, so ist Λ zu $R^{n\times n}$ unter $U(\Lambda)$ konjugiert. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß

$$\Lambda = R^{n\times n},$$

wobei die Transformation noch so gewählt werden kenn, daß

$$\begin{aligned} E_h &= (\delta_{ji}\delta_{hk} I_{n/t_2}),\\ E_{hrs} &= (\delta_{hi}\delta_{hk} E_{rs}),\\ E_{rs} &= (\delta_{ri}\delta_{sk} I_{n/n_1}) \qquad (i,k,r,s = 1,2,\ldots,t_1, h = 1,2,\ldots,t_2). \end{aligned}$$

Die hereditäre Ordnung $\mathfrak{o}_Z$ ist von der Form

$$\mathfrak{o}_Z = \sum_{h=1}^{t_2} E_h \mathfrak{o}_Z E_h,$$

wobei $E_h \mathfrak{o}_Z E_h$ eine hereditäre Ordnung von $E_h Z E_h$ ist, die zum Zentralisator der Matrizeneinheiten E_{hik} gehört, sodaß die Elemente x von $E_h Z E_h$ von der Form

$$(\delta_{hi}\delta_{hk}(I_{t_1} \times \Delta_h(x))) \qquad (i,k = 1,2,\ldots,t_2),$$

sind, wobei Δ_h eine treue Darstellung von $E_h \mathfrak{o}_z$ vom Grade n/n_1 über R ist.

Der Durchschnitt der hereditären Ordnung $E_h \mathfrak{o}_Z$ mit dem Zentrum $\mathfrak{z}(E_h Z) = E_h \geq(Z) \cong_R \mathfrak{z}(Z)$ ist die R-Maximalordnung $E_h \mathfrak{o}_{\mathfrak{z}(Z)} \cong_R \mathfrak{o}_{\mathfrak{z}(Z)}$. Gemaß dem Satz von Steinitz, angewendet auf lokale Dedekindbereiche, ist jede Darstellung über R arithmetisch äquivalent zu einer Summe von regulären Darstellungen, mithin dürfen wir annehmen, daß

$$\Delta_h(E_h z) = (\delta_{ik}\psi(z)) \qquad (i,k = 1,2,\ldots, n/n_1 n_3, z \in \mathfrak{o}_{\mathfrak{z}(Z)}),$$

und ψ die reguläre Darstellung von $\mathfrak{z}(Z)$ über K ist mit R-Basis von $\mathfrak{o}_{\mathfrak{z}(z)}$ als K-Basis von $\mathfrak{z}(Z)$.

Für jede der hereditären Ordnungen $E_h \mathfrak{o}_Z$ finden wir nun eine Partition

$$n/n_1 n_3 = \sum_{i=1}^{s_h} n_{hi} \qquad (s_h \in \mathbb{Z}^{>0}, n_{hi} \in \mathbb{Z}^{>0}, 1 \leqslant i \leqslant s_h),$$

von $n/n_1 n_3$ in die Summe natürlicher Zahlen n_{hi}, sodaß nach geeigneter Transformation $\Delta_h(E_h \mathfrak{o}_Z)$ aus allen Matrizen der Form

$$\begin{aligned} &(X_{hik}),\\ &(X_{hik} \in \psi(\mathfrak{o}_{\mathfrak{z}(Z)})^{n_{hi}\times n_{hk}} \qquad \text{wenn } 1 \leqslant i \leqslant k \leqslant s_h,\\ &X_{hik} \in \psi(\mathfrak{P})^{n_{hi}\times n_{hk}} \qquad \text{wenn } 1 \leqslant k < i \leqslant s_h, \end{aligned}$$

$\mathfrak{P} = j(\mathfrak{o}_{\mathfrak{z}(Z)})$ das maximale Ideal von $\mathfrak{o}_{\mathfrak{z}(Z)})$ besteht.

Wir bemerken nun, daß nach Annahme $\mathfrak{z}(Z)$ separabel und voll verzweigt über K ist, sodaß eine Eisensteinerzeugung $\mathfrak{z}(Z)=K(\xi)$ besteht, für die $\xi\mathfrak{o}_{\mathfrak{z}(Z)}=j(\mathfrak{o}_{\mathfrak{z}(Z)})=\mathfrak{P}$ das maximale Ideal von $\mathfrak{o}_{\mathfrak{z}(Z)}$ ist, und ferner angenommen werden darf, daß

$$\psi(\xi)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & & \\ & 0 & 1 & & & & \\ & & \cdot & \cdot & & & \\ & & & \cdot & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \cdot & \\ & & & & & 0 & 1 \\ \pi_1 & \pi_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \pi_{n_2} \end{bmatrix},$$

$$\pi_1 R=j(R), \qquad \pi_i\in j(R) \qquad (i=1,2,\dots,n_2)\ (n_2=n/n_1n_3).$$

Wir sehen nun wie in [5, S. 390], daß die hereditäre R-Ordnung Λ_0, die von allen Matrizen

$$\begin{aligned}&(y_{hik}),\\ &(y_{ik}\in R \qquad \text{wenn } 1\leqslant i\leqslant k\leqslant n_2,\\ &\ \ y_{ik}\in j(R) \qquad \text{wenn } 1\leqslant k< i\leqslant n_2)\end{aligned}$$

gebildet wird, der Durchschnitt aller Maximalordnungen von $K^{n_2\times n_2}$ ist, die $\psi(\mathfrak{o}_{\mathfrak{z}(Z)})$ enthalten. Entsprechend, daß die R-Ordnung $\tilde{\Lambda}_h$, die von allen Matrizen

$$\begin{aligned}&(Y_{hik}),\\ &(Y_{hik}\in \Lambda_h^{n_{hi}\times n_{hk}} \qquad \text{wenn } 1\leqslant i\leqslant k\leqslant s_h,\\ &\ \ Y_{hik}\in j(\Lambda_h)^{n_{hi}\times n_{hk}} \qquad \text{wenn } 1\leqslant k< i\leqslant s_h)\end{aligned}$$

gebildet wird, der Durchschnitt aller Maximalordnungen von $\psi(\mathfrak{z}(Z))^{n/n_1\times n/n_1}$ ist, die $\Delta_h(E_h\mathfrak{o}_Z)$ enthalten.

Nun ziehen wir die Relationen (20) heran. Wir verwenden die Matrizen

$$E_{rs}=(\delta_{ir}\delta_{ks}I_{n/t_2}) \qquad (r,s,i,k=1,2,\dots,t_2),$$

von Λ, für die gilt

$$E_{ik}E_{rs}=\delta_{kr}E_{is} \qquad (i,k,r,s=1,2,\dots,t_2).$$

Dann folgt aus (20) und der Invarianz $M(\mathfrak{o},\sigma_1)^{-1}\,\mathfrak{o}M(\mathfrak{o},\sigma_1)=\mathfrak{o}$, daß

$$\begin{aligned}M(\mathfrak{o},\sigma_1)^{-1}\,E_i\mathfrak{o}E_iM(\mathfrak{o},\sigma_1)&=E_{i+1}\mathfrak{o}E_{i+1} \qquad (1\leqslant i<t_2),\\ M(\mathfrak{o},\sigma_1)^{-1}\,E_{t_2}\mathfrak{o}E_{t_2}M(\mathfrak{o},\sigma_1)&=E_1\mathfrak{o}E_1.\end{aligned}$$

Wir setzen für $r, s = 1, 2, \ldots, t_2$

$$M(\mathfrak{o}, \sigma_1)_{rs} = \{x_{rs}/(X_{ik}) \in M(\mathfrak{o}, \sigma_1), X_{ik} \in K^{n/t_2 \times n/t_2},$$
$$i, k = 1, 2, \ldots, t_2\}$$
$$M(\mathfrak{o}, \sigma_1)_{rs}^{-1} = \{Y_{rs}/(Y_{ik}) \in M(\mathfrak{o}, \sigma_1)^{-1}, Y_{ik} \in K^{n/t_2 x n/t_2},$$
$$i, k = 1, 2, \ldots, t_2\}$$

und finden wegen (20), (21), daß

$$M(\mathfrak{o}, \sigma_1)_{ik} = 0 \quad \text{wenn } k \neq i+1 (1 \leqslant i < t_2) \text{ oder } i = t_2, k \neq 1,$$
$$M(\mathfrak{o}, \sigma_1)_{ik}^{-1} = 0 \quad \text{wenn } k \neq i-1\ (1 < i \leqslant t_2) \text{ oder } i = 1, k \neq t_2,$$

$$M(\mathfrak{o}, \sigma_1)_{i,i+1} M(\mathfrak{o}, \sigma_1)_{i+1,i}^{-1} = \Delta_i(E_i \mathfrak{o}_Z) \qquad (1 \leqslant i < t_2),$$
$$M(\mathfrak{o}, \sigma_1)_{i+1,i}^{-1} M(\mathfrak{o}, \sigma_1)_{i,i+1} = \Delta_{i+1}(E_i \mathfrak{o}_Z) \qquad (1 \leqslant i < t_2),$$
$$M(\mathfrak{o}, \sigma_1)_{t_2,1} M(\mathfrak{o}, \sigma_1)_{1,t_2}^{-1} = \Delta_{t_2}(E_{t_2} \mathfrak{o}_Z),$$
$$M(\mathfrak{o}, \sigma_1)_{1,t_2}^{-1} M(\mathfrak{o}, \sigma_1)_{t_2,1} = \Delta_1(E_1 \mathfrak{o}_Z),$$
$$M(\mathfrak{o}, \sigma_1)_{i+1,i}^{-1} \Delta_i(E_i \mathfrak{o}_Z) M(\mathfrak{o}, \sigma_1)_{i,i+1} = \Delta_i(E_i \mathfrak{o}_Z) \qquad (1 \leqslant i < t_2),$$
$$M(\mathfrak{o}, \sigma_1)_{1,t_2}^{-1} \Delta_{t_2}(E_t 2\, \mathfrak{o}_Z)\, M(\mathfrak{o}, \sigma_1)_{t_2,1} = \Delta_1(E_1 \mathfrak{o}_Z).$$

Wegen der eindeutigen Bestimmtheit der hereditären Ordnungen $\tilde{\Lambda}_h$ bleiben die eben hergeleiteten Relationen richtig, wenn $\Delta_i(E_i \mathfrak{o}_Z)$ durch $\tilde{\tilde{\Lambda}}_i = I_{t_1} \times \tilde{\Lambda}_i$ ersetzt wird und $M(\mathfrak{o}, \sigma_1)_{i,i+1}$, $M(\mathfrak{o}, \sigma_1)_{i+1,i}$, $M(\mathfrak{o}, \sigma_1)_{t_2,1}$ und $M(\mathfrak{o}, \sigma_1)_{1,t_2}$ durch

$$M_{i,i+1} = \tilde{\tilde{\Lambda}}_i M(\mathfrak{o}, \sigma_1)_{i,i+1} \tilde{\tilde{\Lambda}}_{i+1},$$
$$M_{i+1,i} = \tilde{\tilde{\Lambda}}_{i+1} M(\mathfrak{o}, \sigma_1)_{i+1,i} \tilde{\tilde{\Lambda}}_i \qquad (1 \leqslant i < t_2),$$
$$M_{t_2,1} = \tilde{\tilde{\Lambda}}_{t_2} M(\mathfrak{o}, \sigma_1)_{t_2,1} \tilde{\tilde{\Lambda}}_1,$$
$$M_{1,t_2} = \tilde{\tilde{\Lambda}}_1 M(\mathfrak{o}, \sigma_1)_{1,t_2} \tilde{\tilde{\Lambda}}_{t_2}$$

ersetzt werden. Somit

$$M_{i,i+1} M_{i+1,i} = \tilde{\tilde{\Lambda}}_i, \qquad M_{i+1,i} M_{i,i+1} = \tilde{\tilde{\Lambda}}_{i+1},$$
$$M_{t_2,1} M_{1,t_2} = \tilde{\tilde{\Lambda}}_{t_2}, \qquad M_{1,t_2} M_{t_2,1} = \tilde{\tilde{\Lambda}}_1,$$
$$M_{i+1,i} \tilde{\Lambda}_i M_{i,i+1} = \tilde{\tilde{\Lambda}}_{i+1}, \qquad M_{1,t_2} \tilde{\tilde{\Lambda}}_{t_2} M_{t_2,1} = \tilde{\tilde{\Lambda}}_1 \qquad (1 \leqslant i < t_2).$$

Wir dürfen $M_{i+1,i}$ als Inverses von $M_{i,i+1}$ im Sinne der Theorie der endlich erzeugten R-Moduln maximalen Ranges (Dedekindmoduln) von $K^{n/t_2 \times n/t_2}$ interpretieren.

Sei nun allgemein A ein zentral einfaches hyperkomplexes Sytem über dem Quotientenkörper K des Dedekindbereiches R.

Definition 4. Wir nennen zwei R-Ordnungen X, Y von A *modulkonjugiert*, wenn es R-Dedekindmoduln M_1, M_2 von A gibt, für die

$$M_1XM_2 = Y, \qquad M_1X = YM_1 = M_1, \qquad M_2Y = XM_2 = M_2,$$
$$M_1M_2 = Y \qquad \text{und} \qquad M_2M_1 = X$$

ist. Diese Beziehung ist reflexiv, symmetrisch und transitiv.

Wenn X und Y modulkonjugiert sind, dann bildet die Abbildung

$$ZI(X) \to ZI(Y): \varphi, \qquad \varphi(B) = M_1BM_2 \qquad (B \in ZI(X)),$$

die Menge $ZI(X)$ der R-Dedekindmoduln M die der Invarianzbedingung $XM = M = MX$ genügen, eineindeutig auf die entsprechend gebildete Menge $ZI(Y)$ ab. Ferner erhält die Abbildung sowohl die in $ZI(X)$ definierte Modulmultiplikation als auch die dort ebenfalls abgeschlossene Moduladdition. Auch gilt für jedes Mitglied λ von $ZI(R)$ in K, daß $\varphi(\lambda B) = \lambda\varphi(B)$ $(B \in ZI(X))$ ist. Mithin bildet φ das arithmetische Radikal von X auf das arithmetische Radikal von Y *ab*:

$$\varphi(\mathrm{AR}(X)) = \mathrm{AR}(Y).$$

Bezüglich X invertierbare Ideale werden auf bezüglich Y invertierbare Ideale abgebildet. Mithin ist jede Modulkonjugierte einer hereditären Ordnung wieder hereditär.

Ein spezieller Fall von Modulkonjugiertheit ist die Konjugiertheit zweier R-Ordnungen X, Y von A bezüglich innerer Automorphismen. Wenn nämlich $\varepsilon^{-1}X\varepsilon = Y$ $(\varepsilon \in U(A))$ gilt, dann haben wir $M_1XM_2 = Y$ mit $M_1 = Y\varepsilon^{-1}X$, $M_2 = X \in Y$.

Das Umgekehrte gilt dagegen nicht notwendig. Denn es sei z.B.

$$A = S^{n \times n}, \qquad S \text{ schiefkörper},$$
$$\mathfrak{o}_S \text{ eine } R\text{-Maximalordnung von } S,$$
$$\mathfrak{g} \text{ ein maximales Ideal von } \mathfrak{o}_S,$$

dann ist $\mathfrak{o}_S^{n\times n}$ eine R-Maximalordnung von

$$A = \sum_{i=1}^{n}{}^{\cdot} \sum_{k=1}^{n}{}^{\cdot} e_{ik}S, \qquad e_{rs} = (\delta_{ir}\delta_{ks})$$

und für jede Partition

$$n = \sum_{i=1}^{s} n_i \qquad (s \in \mathbb{Z}^{>0}, n_i \in \mathbb{Z}^{>0}, 1 \leqslant i \leqslant s),$$

haben wir die hereditäre R-Ordnung

$$H(\mathfrak{o}_S, \mathfrak{g}, n_1, ..., n_s) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant k \leqslant n}^{\cdot} e_{ik} \mathfrak{o}_S \dot{+} \sum_{1 \leqslant k < i \leqslant n} \mathfrak{g} e_{ik} \mathfrak{o}_S$$

in Standarddarstellung. Dann sind $X = H(\mathfrak{o}_S, \mathfrak{g}, n_1, ..., n_s)$, $Y = H(\mathfrak{o}_S, \mathfrak{g}, n'_1, ..., n'_s)$ modulkonjugiert, weil

$$(YX)\,X(XY) = YXXXY = YXY = Y,$$
$$(YX)(XY) = YXY = Y,$$
$$(XY)(YX) = XYX = X,$$

wie sofort nachgerechnet wird.

Dagegen sind $H(\mathfrak{o}_S, \mathfrak{g}, n_1, ..., n_s)$, $H(\mathfrak{o}_S, \mathfrak{g}, n'_1, ..., n'_s)$ genau dann konjugiert unter $U(A)$, wenn $n_i = n'_i$ $(1 \leqslant i \leqslant s)$, d.h. $H(\mathfrak{o}_S, \mathfrak{g}, n_1, ..., n_s) = H(\mathfrak{o}_S, \mathfrak{g}, n'_1, ..., n'_s)$ ist. Andererseits können $X = H(\mathfrak{o}_S, \mathfrak{g}, n_1, ..., n_s)$ und $Y = H(\mathfrak{o}_S, \mathfrak{g}, n'_1, ..., n'_{s'})$ nur dann modulkonjugiert sein, wenn $s = s'$ ist, weil die Abbildung φ die Oberordnungen von X eineindeutig auf die Oberordnungen von Y abbildet. Aber unter ihnen sind genau s maximale für X, s' maximale für Y, mithin maß $s = s'$ sein.

Eine Modulkonjugiertheitsrelation

$$M_1 X M_2 = Y, \qquad M_1 X = Y M_1 = M_1, \qquad M_2 Y = X M_2 = M_2,$$
$$M_1 M_2 = Y \qquad \text{und} \qquad M_2 M_1 = X$$

wird trivial abgeändert, wenn M_1 ersetzt wird durch $M_1 U$ mit bezüglich X invertierbarem U aus $ZI(X)$ und M_2 ersetzt wird durch $U^{-1} M_2 = (M_1 U M_2)^{-1}$.

Andererseits, wenn noch eine zweite Modulkonjugiertheitsrelation $M'_1 X M'_2 = Y$, $M'_1 M'_2 = Y$, $M'_2 M'_1 = X$ besteht, dann ergibt sich, daß

$$M'_2 M_1 M_2 M'_1 = M'_2 Y M'_1 = M'_2 M'_1 X M'_2 M'_1 = XXX = X,$$
$$M_2 M'_1 M'_2 M_1 = M_2 Y M_1 = M_2 M_1 X M_2 M_1 = XXX = X,$$
$$X M_2 M'_1 = M_2 M'_1 = M_2 M'_1 X, \qquad X M'_2, M_1 = M'_2 M_1 = M'_2 M_1 X,$$

sodaß M_2M_1' und $M_2'M_1$ zueinander bezüglich X inverse Ideale sind. Setzen wir nun $U=M_2M_1'$, $U^{-1}=M_2'M_1$, so ist

$$M_1U=M_1M_2M_1'=YM_1'=M_1', \qquad U^{-1}M_2=M_2'M_1M_2=M_2'Y=M_2'.$$

Demnach ist jede Modifikation trivial.

Kehren wir nun zu der Untersuchung des gegenwärtigen Falles zurück. Unter den Dedekindmoduln von $K^{n/t_2\times n/t_2}$, die X in Y transformieren, gibt es genau einen maximalen, etwa $T(X, Y)$. Alle anderen sind von der Form

$$j(X)^\nu\, T(X, Y)=T(X, y)\,j(Y)^\nu \qquad (\nu\in\mathbb{Z}^{>0}).$$

Die Optimalität von $\mathfrak{o}$ zusammen mit der Bedingung (20) bedeuten nun, daß

$$\begin{aligned} M_{i,i+1}&=I_{t_1}\times T(\tilde{\Lambda}_i, \tilde{\Lambda}_{i+1}) \qquad (1\leqslant i<t_2),\\ M_{t_2,1}&=j(\mathfrak{o}_Z)(I_{t_1}\times T(\tilde{\Lambda}_{t_2}, \tilde{\Lambda}_1)) \end{aligned}$$

ist. Wir merken gleich an, daß für drei hereditäre Ordnungen X_1, X_2, X_3 von $K^{n/t_2\times n/t_2}$, von denen sich je zwei mit Hilfe invertierbarer Dedekindmoduln ineinander transformieren lassen, die Regel

$$T(X_1, X_3)=T(X_1, X_2)\,T(X_2, X_3) \tag{24}$$

gilt. Nun sehen wir, daß Λ die R-Unteralgebren

$$(\delta_{hi}\delta_{hk}\tilde{\Lambda}_h^{t_1\times t_1}) \qquad (1\leqslant h\leqslant t_2),$$

sowohl als auch die R-Untermoduln

$$\begin{aligned} &(\delta_{hi}\delta_{h+1,k}T(\tilde{\Lambda}_h^{t_1\times t_1}, \tilde{\Lambda}_{h+1}^{t_1\times t_1})) \qquad (1\leqslant h<t_2),\\ &(\delta_{t_2i}\delta_{1k}\,j(\mathfrak{o}_Z)\,T(\tilde{\Lambda}_{t_2}^{t_1\times t_1}, \tilde{\Lambda}_1^{t_1\times t_1})) \qquad (i, k=1, 2, \ldots, t_2), \end{aligned}$$

also wegen multiplikativer Abgeschlossenheit und der Regeln (24) auch die R-Untermoduln

$$\begin{aligned} &(\delta_{hi}\delta_{h'k}T(\tilde{\Lambda}_h^{t_1\times t_1}, \Lambda_{h'}^{t_1\times t_1})) \qquad (1\leqslant h\leqslant h'\leqslant t_2),\\ &(\delta_{hi}\delta_{h'k}\,j(\mathfrak{o}_Z)\,T(\tilde{\Lambda}_h^{t_1\times t_1}, \Lambda_{h'}^{t_1\times t_1})) \qquad (1\leqslant h'<h\leqslant t_2) \end{aligned}$$

enthält.

Beachten wir noch, daß $T(\tilde{\Lambda}_h^{t_1\times t_1}, \tilde{\Lambda}_h^{t_1\times t_1})=\tilde{\Lambda}_n^{t_1\times t_1}$, so finden wir, daß Λ die hereditäre Ordnung

$$\begin{aligned} &\sum_{1\leqslant r\leqslant s\leqslant t_2}^{\cdot} (\delta_{ir}\delta_{ks}T(\tilde{\Lambda}_r^{t_1+t_1}, \tilde{\Lambda}_s^{t_1+t_1}))\\ &\dotplus \sum_{1\leqslant s<r\leqslant t_2}^{\cdot} (\delta_{ir}\delta_{ks}\,j(\mathfrak{o}_Z)\,T(\tilde{\Lambda}_r^{t_1\times t_1}, \tilde{\Lambda}_s^{t_1\times t_1})) \end{aligned}$$

vom Partitionstypus

$$n = \sum_{i=1}^{s_1} \left(\sum_{j=1}^{t_2} n_{ji} \right)$$

enthält, für die die Regeln

$$j(\mathfrak{o}_Z)^{-1}\, \tilde{\mathfrak{o}}_A\, j(\mathfrak{o}_Z) = \tilde{\mathfrak{o}}_A,$$
$$M(\mathfrak{o}, \sigma)^{-1}\, \tilde{\mathfrak{o}}_A M(\mathfrak{o}, \sigma) = \tilde{\mathfrak{o}}_A \qquad (\sigma \in \bar{G}),$$

ebenfalls erfüllt sind. Mithin ist $\tilde{\mathfrak{o}}_A$ enthalten in allen maximalen Ordnungen, die $\mathfrak{o}$ enthalten, also auch in $\mathfrak{o}_A$. Aber keine echte Oberordnung von $\tilde{\mathfrak{o}}_A$ ist mehr unter der Transformation mit $j(\mathfrak{o}_Z)$ und mit $M(\mathfrak{o}, \sigma)$ $(\sigma \in \bar{G})$ invariant. Also ist $\mathfrak{o}_A = \tilde{\mathfrak{o}}_A$.

Somit ist in der Tat $\mathfrak{o}_A$ der Durchschnitt aller $\mathfrak{o}$ enthaltenden maximalen Ordnungen. Aus der Beschreibung von $\tilde{\mathfrak{o}}_A$ geht hervor, daß

$$M(\mathfrak{o}, \sigma) = \mathfrak{o}_A$$

ist, sodaß in der Tat $\mathfrak{o}$ die maximale in $\mathfrak{o}_A$ enthaltene verschränkte Produktordnung bezüglich G, Z, R ist. Damit ist der Satz für den speziellen Fall der Voraussetzungen (A) bis (E) bewiesen. Wie in [5] verwenden wir nun die Bemerkung, daß sowohl die Behauptung des Satzes als auch seine Voraussetzungen invariant sind gegenüber

(a) Lokalisierung,

(b) Komplettierung,

(c) Erweiterung des Grundkörpers zu relativ unverzweigter Erweiterung.

Damit wird der Satz aber auf den bisher behandelten Spezialfall zurückgeführt.

LITERATUR

1. H. Benz, Untersuchungen zur Arithmetik in lokalen einfachen Algebren, insbesondere über maximalen Teilkörpern, I, *J. Reine Angew. Math.* **225** (1967), 30–75.
2. Dickson, "Algebren und ihre Zahlentheorie," Zürich, 1927.
3. Hasse, Theory of cyclic algebras over an algebraic number field, *Trans. Amer. Math. Soc.* **34** (1932), 171–214.
4. Teichmüller, Verschränkte Produkte mit Normalringen *Deutsch. Math.* **1** (1936), 90–102.
5. H. Zassenhaus, "A Theorem on Cyclic Algebras, Number Theory and Algebra," pp. 363–393, Collected Papers, 1977.